Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Inhalt

Übersicht:

- Definition
- Beispiele
- Typen von PDG‘s
- Elliptische PDG‘s
- Hyperbolische PDG‘s
- Parabolische PDG‘s

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Definition (vgl. Mathe 2)

Unter einer Differentialgleichung verstehen wir eine Gleichung, in der die Unbekannte eine Funktion ist.

Neben der gesuchten Funktion $y(x)$ treten auch Ableitungen der Funktion in der Gleichung auf: $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots$

Hängt die gesuchte Funktion nur von einer Variablen ab $y(x)$, so liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung vor.

Hängt die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab (z.B. $y(t,x)$) und treten die partiellen Ableitungen bzgl. dieser Variablen auf, so liegt eine partielle Differentialgleichung vor.

Die höchste auftretende Ableitung legt die Ordnung der Differentialgleichung fest.

Partielle Differentialgleichungen

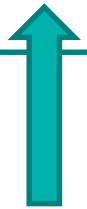
Übersicht und Grundbegriffe

Beispiele (vgl. Mathe 2)

Gleichung des exponentiellen Wachstums: $\frac{dN(t)}{dt} = \alpha \cdot N(t)$

Elektrischer Schwingkreis: $LC \cdot I''(t) + RC \cdot I'(t) + I(t) = 0$

Wärmeleitungsgleichung: $\rho c_p \cdot \partial_t T(x,t) = \lambda \cdot \partial_x^2 T(x,t)$



Hängt von x und t ab!

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Beispiele für PDG‘S

Die Maxwell Gleichungen bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für das elektrische und magnetische Feld…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

E- und B-Feld hängen von $\vec{x}$ und t ab

Die gesuchten Funktionen $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ treten mit ihren Ableitungen in den Gleichungen auf, daher handelt es sich um partielle Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Laplace bzw. Poisson Gleichung

In der Elektrostatik kann das E-Feld mit Hilfe eines elektrischen Potentials φ beschrieben werden. Es gilt:

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

Nutzen wir das Gauß'sche Gesetzt für das E-Feld aus den Maxwell Gleichungen, erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für das elektrische Potential…

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{div}(\nabla\varphi)}_{=\Delta\varphi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(Laplace Operator)

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Laplace bzw. Poisson Gleichung

Die Bestimmungsgleichung für das elektrische Potential wird als Poisson Gleichung bezeichnet…

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Falls keine Ladungen vorliegen, d.h. $\rho = 0$ ist, wird die Gleichung als Laplace Gleichung bezeichnet (homogene PDG)…

$$\Delta\varphi = 0$$

Bemerkung:

Die Laplace Gleichung beschreibt auch eine stationäre Temperaturverteilung!

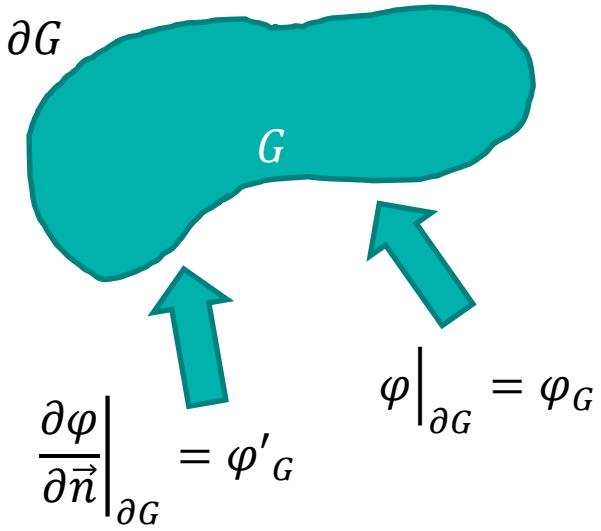
Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Randwertproblem zur Poisson Gleichung

Wenn wir uns für das elektrische Potential eines Gebietes G interessieren, müssen wir die Poisson Gleichung lösen…

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Nur die PDG genügt nicht. Wir müssen analog zu gewöhnlichen DGLs noch Werte für die gesuchte Funktion vorschreiben…

Was passiert am Rand ∂G des Gebietes?

Wir geben einen Wert für das Potential auf dem Rand vor (Spannung wird vorgegeben, Dirchlet RB)…

Alternativ kann auch die Ableitung vorgegeben werden (Flüsse oder Ströme werden vorgegeben, Neumann RB)…

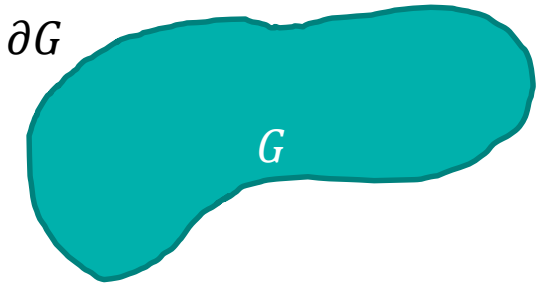
Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen die Wärmeleitung im Gebiet G berechnen. Dazu müssen wir die Wärmeleitungsgleichung lösen…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q$$



Was passiert am Rand ∂G des Gebietes?

Randbedingung 1. Art (Dirichlet)
$$T(\vec{x}, t)\Big|_{\vec{x} \in \partial G} = T_{\partial G}(\vec{x}, t) \qquad \vec{x} \in \partial G$$

Randbedingung 2. Art (Neumann)
$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} T(\vec{x}, t)\Big|_{\vec{x} \in \partial G} = q_{\partial G}(\vec{x}, t) \qquad \vec{x} \in \partial G$$

Randbedingung 3. Art (Robin)
$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} T(\vec{x}, t)\Big|_{\vec{x} \in \partial G} = h \cdot \left(T(\vec{x}, t) - T_{\text{ext}}(\vec{x}, t)\right) \ \vec{x} \in \partial G$$

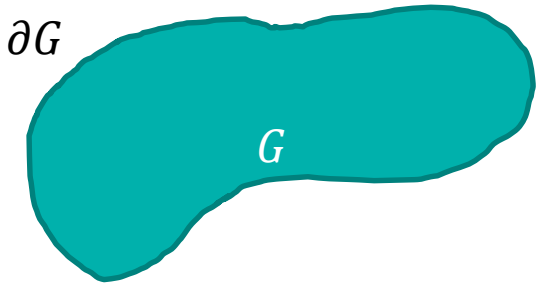
Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen die Wärmeleitung im Gebiet G berechnen. Dazu müssen wir die Wärmeleitungsgleichung lösen…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q$$



Wie sieht die Temperatur zu Beginn aus?

Wir müssen eine Anfangstemperatur (Anfangswert) zur Zeit $t = 0$ vorgeben…

$$T(\vec{x}, 0) = T_0(\vec{x})$$

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Randwert- und Anfangsrandwertprobleme

Wir haben gesehen, dass die PDG alleine nicht ausreicht. Wir müssen weitere Angaben machen, um eine Lösung erhalten zu können…

Randwertprobleme

Hängt die gesuchte Funktion nur vom Ort und nicht von der Zeit ab, müssen wir Angaben zu den Randwerten machen, d.h. vorgeben wie unser Gebiet mit der Umgebung interagiert.

Wir können hier Funktionswerte und/oder Ableitungen der gesuchten Funktion vorgeben.

Anfangsrandwertprobleme

Ist die gesucht Funktion zeitabhängig, müssen wir zusätzlich noch Anfangswerte für die gesuchte Funktion vorgeben.

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Aufgabe bei PDG`S

Was ist zu tun, wenn wir eine PDG vorliegen haben?

Mathematik & Theoretische Physik

Zunächst einmal werden Aussagen über die Lösbarkeit des RWP oder ARWP gemacht, d.h.

- … existiert eine Lösung
- … unter welchen Voraussetzungen existiert sie
- … ist die Lösung eindeutig
- … unter welchen Voraussetzungen ist sie eindeutig

Die positive Antwort auf diese Fragen wird bei praktischen Ingenieur-wissenschaftlichen Problemen i.d.R. voraus-gesetzt…

Gibt es Lösungsmethoden, wie ich die Probleme lösen kann?

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Lösungsmethoden für PDG Probleme

Nur bei speziellen Konfigurationen existieren Lösungsformeln oder Lösungsmethoden, die angewendet werden können…

Was bedeutet spezielle Konfigurationen?

Wenn das betrachtete Gebiet eine spezielle Form hat, existieren Lösungsformeln. Ist G z.B. eine Kugel, so kann dass Dirichlet-Randwertproblem zur Laplace Gleichung mit Hilfe der Poisson‘schen Integralformel gelöst werden.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial G$$

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\omega_n R} \oiint\limits_{\partial G} \dfrac{g(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|^n} \overrightarrow{dA} & x \in G \\ g(\vec{x}) & x \in \partial G \end{cases}$$

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Lösungsmethoden für PDG Probleme

Nur bei speziellen Konfigurationen existieren Lösungsformeln oder Lösungsmethoden, die angewendet werden können…

Was bedeutet spezielle Konfigurationen?

Auch für die Wärmeleitungsgleichung existiert eine Formel, welche die sogenannte Fundamentallösung (Wärmeleitungskern) verwendet…

$$H(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \cdot t}}\, e^{-|\vec{x}|^2/4a\cdot t}$$

Die Lösung ergibt sich durch Faltung mit den Anfangs- und Randwerten…

$$T(\vec{x},t) = (H * T_0)(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(\vec{x}-\vec{y},t)\cdot T_0(\vec{y})\, d\vec{y}$$

Temperaturleitfähigkeit: $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$

Praktische Bedeutung:

Abschätzung für Wärmeausbreitung!

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Lösungsmethoden für PDG Probleme

Nur bei speziellen Konfigurationen existieren Lösungsformeln oder Lösungsmethoden, die angewendet werden können…

Was bedeutet spezielle Konfigurationen?

Wenn die gesuchte Lösung $u(t,x)$ von der Zeit und vom Ort abhängt kann ein Separationsansatz gemacht werden…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \lambda \ \Delta T$$

Separationsansatz/Produktansatz:

$$T(x,t) = u(t) \cdot v(x)$$

Da links nur bzgl. der Zeit und rechts nur bzgl. des Ortes abgeleitet wird, ergeben sich zwei gewöhnliche DGL‘s

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Lösungsmethoden für PDG Probleme

Nur bei speziellen Konfigurationen existieren Lösungsformeln oder Lösungsmethoden, die angewendet werden können…

Was bedeutet spezielle Konfigurationen?

PDG‘s werden üblicherweise in drei Typen (Klassen) eigenteilt. Jede Klasse besitzt spezielle, typische Eigenschaften, die zur Charakterisierung oder zur Berechnung der Lösung verwendet werde können.

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Drei Grundtypen für PDG‘s

Wir betrachten eine allgemeine, lineare, inhomogene PDG zweiter Ordnung…

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\vec{x}) \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_k} u(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\vec{x}) \cdot \partial_{x_k} u(\vec{x}) + c(\vec{x}) \cdot u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

2. Ableitungen — 1. Ableitung — Inhomogenität

Die Koeffizientenfunktionen a_{jk}, b_k und c hängen nur von x ab, aber nicht von der gesuchten Funktion u!

⇒ Lineare PDG

Partielle Differentialgleichungen

Übersicht und Grundbegriffe

Drei Grundtypen für PDG's

Wir betrachten eine allgemeine, lineare, inhomogene PDG zweiter Ordnung…

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\vec{x}) \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_k} u(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\vec{x}) \cdot \partial_{x_k} u(\vec{x}) + c(\vec{x}) \cdot u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die PDG heißt im Punkt $\vec{x}$ …

elliptisch, wenn A nur positive oder negative Eigenwerte besitzt

hyperbolisch, wenn A einen negativen und sonst nur positive Eigenwerte besitzt (oder umgekehrt)

parabolisch, wenn A mindesten einen Eigenwert null besitzt und alle anderen Eigenwerte positiv oder negativ sind.

Bemerkungen

Wozu die drei Grundtypen?

Wir gibt drei Standardvertreter für die Grundtypen (Poisson Gleichung, Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung). Diese sind sehr gut untersucht und besitzen eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften, die typisch für die drei Grundtypen sind. Diese können auch auf andere Gleichungen des selben Typs übertragen werden.

Woher kommt die Bezeichnung?

Die Bezeichnung elliptisch, parabolisch und hyperbolisch stammt von Kegelschnitten. Die Gleichung der Kegelschnitte

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ist von der Struktur her ähnlich aufgebaut, wie lineare PDGs zweiter Ordnung. Es gelten ähnliche Bedingungen für die Koeffizienten, dass eine Ellipse, eine Parabel oder Hyperbel entstehen.

Bemerkungen

Ist die Einteilung eindeutig?

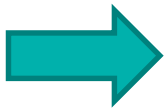
Es kann auch gemischte Typen geben.

Für PDG's mit zwei oder drei Dimensionen ist die Einteilung vollständig.

Für höhere Dimensionen existieren PDG's, die aus dem Schema fallen.

Beispiel:

Wir betrachten… $\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u - \partial_{x_3}^2 u - \partial_{x_4}^2 u = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Gibt es weitere Typdefinitionen?

Es gibt unterschiedliche Definitionen, die in der Regel zur gleichen Einteilung führen.

Bei einigen Definitionen ist die Einteilung „strenger".

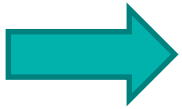
Weiter existieren „Abschwächungen" der Typen für höhere Dimensionen oder auch für PDGs höherer Ordnung.

Partielle Differentialgleichungen

Elliptische PDG's

Beispiele für elliptische PDG's

Das typische Beispiel für eine elliptische PDG ist die Poisson Gleichung…



$$\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Die Poisson Gleichung beschreibt…

… das elektrostatische Potential zu einer Ladungsverteilung f

… die stationäre Temperaturverteilung zu einer gegebene Quelle f

… das Gravitationspotential zu gegebener Massendichte f

… die Auslenkung einer eingespannten Membran

… das Potential einer stationären, inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

Partielle Differentialgleichungen

Elliptische PDG's

Beispiele für elliptische PDG's

Die homogene Gleichung, d.h. mit rechter Seite gleich null $f = 0$, wird Laplace Gleichung genannt…

$$\Delta u(\vec{x}) = 0$$

Die Laplace Gleichung beschreibt die entsprechenden Phänomene ohne externe Quelle, d.h. wenn z.B. keine Ladungs- oder Massenverteilung vorhanden ist.

Bemerkung:

Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar sind und die Laplace Gleichung erfüllen werden harmonische Funktionen genannt.

Harmonische Funktionen in 1D: $u(x) = ax + b$

Partielle Differentialgleichungen

Hyperbolisch PDG‘s

Beispiele für hyperbolische PDG‘s

Das typische Beispiel für eine hyperbolische PDG ist die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \cdot \left(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u\right)$$

Diese Gleichung beschreibt Wellenphänomene:

- Wellenausbereitung
- stehende Wellen
- mechanische Wellen
- elektromagnetische Wellen



Quelle: Wikipedia

Partielle Differentialgleichungen

Hyperbolisch PDG‘s

Beispiele für hyperbolische PDG‘s

Das typische Beispiel für eine hyperbolische PDG ist die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \cdot \left(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u\right)$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lässt sich als Linearkombination von ebenen Wellen schreiben.

Die Lösung hängt stetig von den Anfangswerten ab. Zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ hängt sie genauer gesagt nur von den Anfangswerten an den Orten $\vec{y}$ ab, von denen man $\vec{x}$ in der Laufzeit $|t|$ mit Geschwindigkeit c erreichen kann.

Sie genügt damit dem Hygens‘schen Prinzip.

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG‘s

Beispiele für parabolische PDG‘s

Parabolische Differentialgleichungen beschreiben Evolutionsprobleme, in der die Zeit in der ersten Ableitung auftritt.

Das bekannteste Beispiel ist die Wärmeleitungsgleichung…

$$\rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(\vec{x}, t) = \lambda \cdot \Delta T(\vec{x}, t)$$

Allgemein werden Diffusionsprozesse durch parabolische DGL‘s beschrieben…

$$\partial_t c(\vec{x}, t) = \nabla \cdot \left(D \, \nabla c(\vec{x}, t) \right)$$

Stoffmengen-konzentration

Diffusions-koeffizient

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG‘s

Beispiele für parabolische PDG‘s

Parabolische Differentialgleichungen beschreiben Evolutionsprobleme, in der die Zeit in der ersten Ableitung auftritt.

Weitere Anwendungen ist die Berechnung der Ausbreitung von Schall im Meer oder die Entwicklung von Aktienoptionen in der Wirtschaft.

Black-Scholes-DGL:

$$\partial_t V + rS \cdot \partial_S V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \partial_S^2 V = rV$$

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Dimensionslose Version der WLGl

In der Mathematik ist es üblich alle Materialparameter auf eins zu setzen…

$$\rho \cdot c_p \cdot \partial_t T(\vec{x}, t) = \lambda \cdot \Delta T(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t)$$



$$\partial_t T(\vec{x}, t) = \Delta T(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t)$$

Der Grund liegt in den Fragestellungen, die in der Mathematik interessant sind…

- Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung
- Lösungsverfahren (analytisch und numerisch)

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG‘s

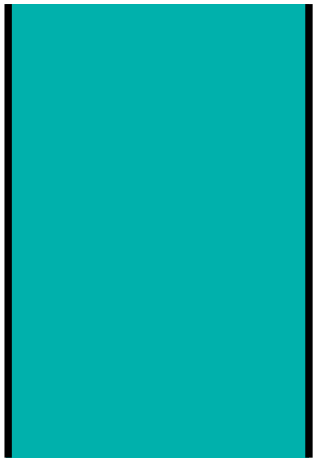
Dimensionslose Version der WLGl

Eine dimensionslose Version der Wärmeleitungsgleichung ergibt sich im Maschinenbau durch Einführen von dimensionslosen Kennzahlen.

Wir betrachten als Beispiel den 1D konvektiven Wärmeübergang (RB 3. Art):

Thermische Isolierung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} T(x=0,t) = 0$$



Wärmeübergang durch Temperaturunterschied

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} T(x=L,t) = \alpha \cdot (T(x=0,t) - T_\infty)$$

$x = 0$ $x = L$

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Dimensionslose Version der WLGl

Wir führen die folgenden dimensionslosen Größen ein…

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$Fo = \frac{at}{L^2}$$

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\theta(Fo,\xi)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\theta(Fo,\xi)}{\partial\xi^2}$$

$$\theta(Fo = 0, \xi) = 1$$

$$\frac{\partial\theta(t,\xi = 0)}{\partial\xi} = 0$$

$$\frac{\partial\theta(t,\xi = 1)}{\partial\xi} = -Bi \cdot \theta(Fo,\xi = 1)$$

Fo = Fourier Zahl (zeitliches Verhalten bezogen auf die Dimension *L*)

Bi = Biot Zahl (Verhältnis von Wärmeleit- zu Wärmeübergangswiderstand)

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Bedeutung der Terme

Wir betrachten die 1D Wärmeleitungsgleichung und versuchen die qualitative Bedeutung der Terme zu verstehen (d.h. Parameter sind eins)…

$$\partial_t T(x,t) = \partial_x^2 T(x,t)$$



Zeitableitung, beschreibt wie sich die Temperatur mit der Zeit ändert

Zweite Ableitung bzgl. des Ortes bestimmt das Vorzeichen der Zeitableitung

$\partial_t T(x,t) > 0$ Temperatur wächst an der Stelle x

$\partial_t T(x,t) < 0$ Temperatur fällt an der Stelle x

$\partial_t T(x,t) = 0$ Temperatur ist konstant an der Stelle x

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Bedeutung der Terme

Wir approximieren die zweite Ableitung bzgl. des Ortes, um den Term besser verstehen zu können

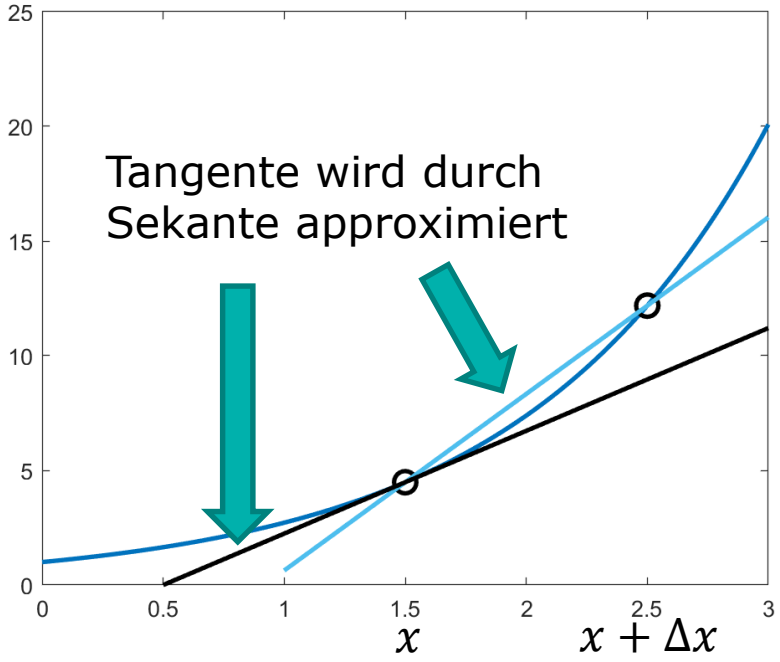
$$\partial_t T(x,t) = \partial_x^2 T(x,t)$$

Approximation der ersten Ableitung…

$$\partial_x T(x,t) \approx \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x}$$

Approximation der zweiten Ableitung…

$$\partial_x^2 T(x,t) \approx \frac{T(x+\Delta x,t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$



Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Bedeutung der Terme

Wir approximieren die zweite Ableitung bzgl. des Ortes, um den Term besser verstehen zu können

$$\partial_t T(x,t) = \partial_x^2 T(x,t)$$

Approximation der zweiten Ableitung…

$$\partial_x^2 T(x,t) \approx \frac{T(x+\Delta x,t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$



$$\partial_x^2 T(x,t) \approx \frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t)}{2} - T(x,t)\right)$$

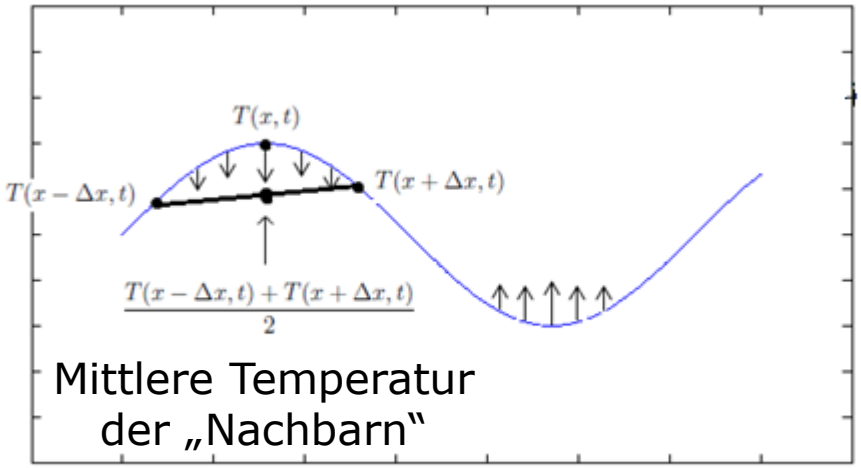
Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Bedeutung der Terme

Was bedeutet die zweite Ableitung?

$$\partial_x^2 T(x,t) \approx \frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{T(x+\Delta x,t)+T(x-\Delta x,t)}{2} - T(x,t)\right)$$



Mittlere Temperatur der „Nachbarn"

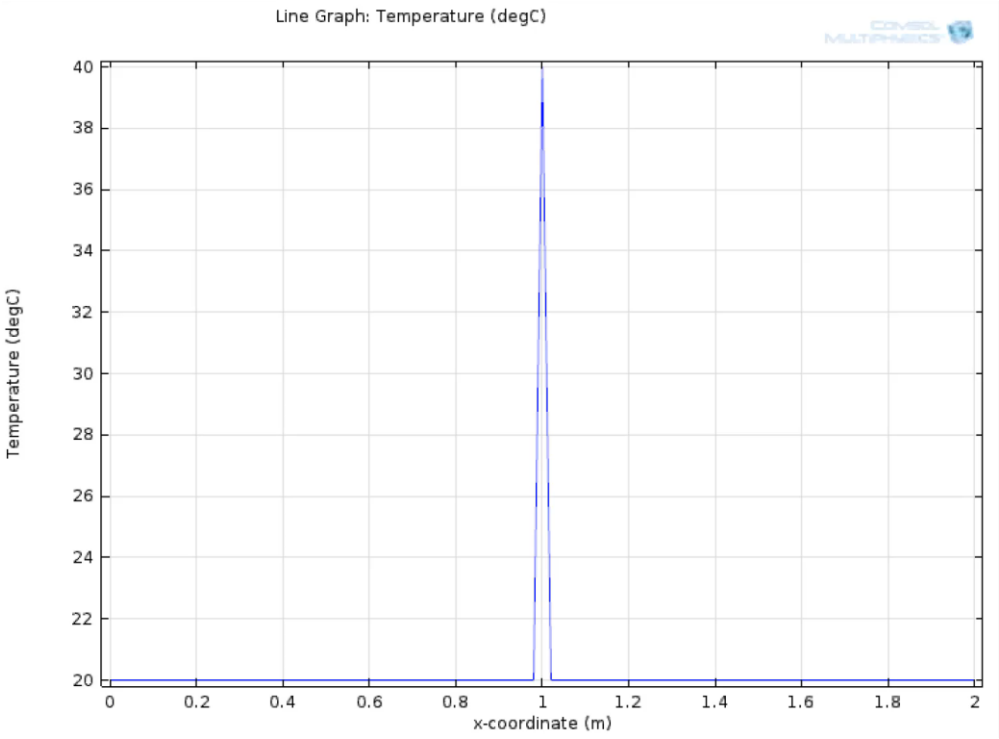
Die zweite Ortsableitung sagt etwas darüber aus, wie „konkav" das Temperaturprofil an der Stelle x ist, d.h. wie weit wir vom Äquilibrium entfernt sind…

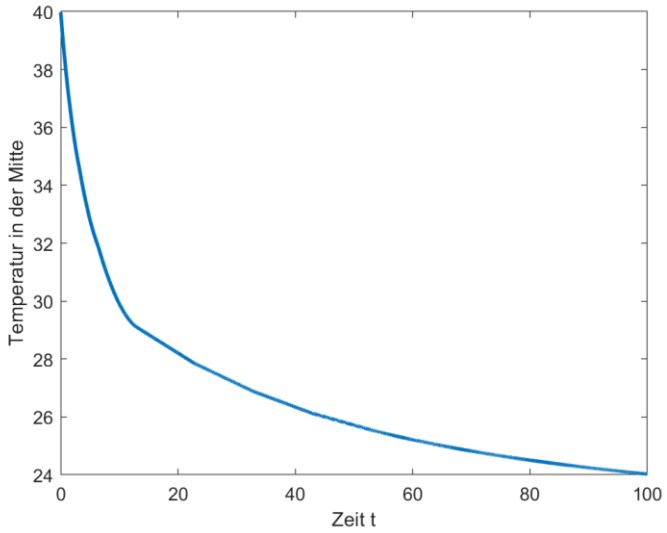
Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG‘s

Glättungseigenschaft der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt Diffusionsprozesse, d.h. wenn zu Beginn ein sehr scharfes Temperaturprofil vorherrscht, wird dieses im nächsten Augenblick geglättet und „verschmiert“…





Wärmeleitungskern 1D:

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

Partielle Differentialgleichungen

Parabolische PDG's

Min-Max-Prinzip

Für parabolische DGL's und damit auch für die Wärmeleitungsgleichung gilt das Min-Max-Prinzip…

Physikalisch:

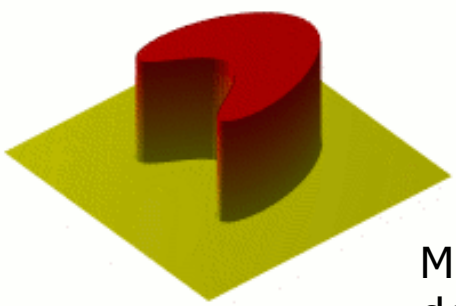
Die physikalische Tatsache, dass Wärme nicht aus dem Nichts entstehen kann, wird mathematisch im Min-Max-Prinzip wiedergegeben…

> *Der Maximalwert (Minimalwert) der Temperatur wird entweder am Anfang des betrachteten Zeitintervalls oder am Rand des Raumbereichs angenommen.*



Maxima und Minima am Rand

Quelle: Wikipedia



Maxima zu Beginn der Betrachtung

Quelle: Wikipedia